REPASO FUNCIONES CUADRÁTICAS
Docente: Marcela Barrera

Recordar las distintas formas en que se puede escribir una función cuadrática:

Para todos los casos $\mathbf{a \neq 0}$

Forma polinómica: $\mathbf{f(x) = ax^2+bx+c}$

Forma canónica: $\mathbf{f(x) = a\,(x-x_v)^2 + y_v}$

Forma factorizada: $\mathbf{f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)}$

"a" es el mismo en todos los casos

- En la forma canónica:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad (1)$$

$\mathbf{y_v = f(x_v)}$

donde **a** y **b** son los de la forma polinómica.

Entonces, las coordenadas del vértice V son: $\mathbf{V = (x_v, y_v)}$

- En la forma factorizada:

x_1 y x_2 son los ceros o raíces de la función:

$\mathbf{C^o : \{x_1, x_2\}}$

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad (2)$$

$\mathbf{y_v = f(x_v)}$

Todas las formas de escribir la función cuadrática son **equivalentes**. Se usa una u otra dependiendo de cuáles son los datos del ejercicio. **Eso significa que no es necesario distribuir para pasar a la forma polinómica al final del ejercicio.**

Ejemplo 1

Hallar la función cuadrática f tal que C^o:{-1, 5} y f(-4) = -9. Hallar Imf.

De acuerdo a los datos, vamos a usar la forma factorizada de la función cuadrática. Sabemos que $x_1=-1$ y $x_2=5$. Entonces:

$f(x) = a\,(x-(-1))\,(x-5)$
$f(x) = a\,(x+1)\,(x-5)$

Nos falta averiguar **a**, para ello usamos el dato f(-4) = -9

f(-4) = a (-4+1) (-4-5)

f(-4)= a (-3) (-9)

f(-4)= a 27 = -9

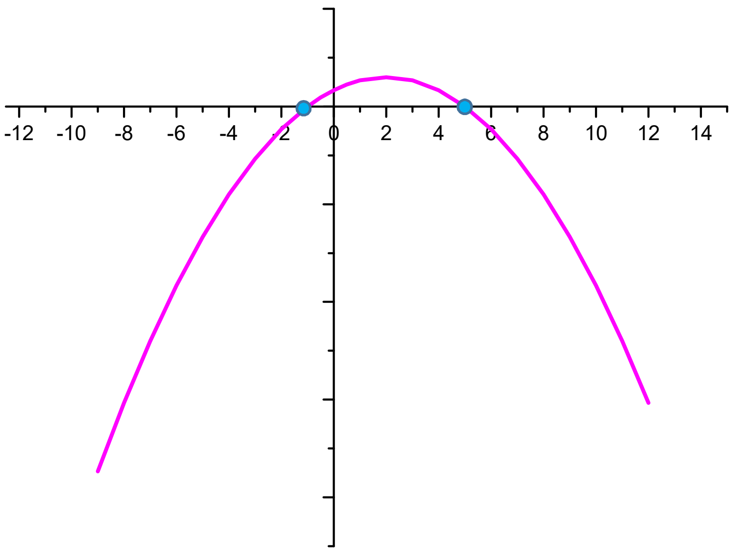
Despejando: $a = -\frac{9}{27}$

Simplificando: $a = -\frac{1}{3}$

Entonces:

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-5)}$$

Luego el ejercicio pide hallar la imagen de la función. Recordar que en una función cuadrática la imagen queda determinada por el signo de **a** (si **a** es positivo la función es cóncava o mira hacia arriba, si **a** es negativo la función es convexa o mira hacia abajo) y la coordenada y del vértice (y_v).
Dibujamos cualitativamente la función, tenemos en cuenta sus ceros y que a=-1/3:



Notamos que Imf= $(-\infty, y_v]$

Entonces, usando la ecuación (2):

$x_v = \frac{-1+5}{2} = 2$

y_v = f(2)= 3

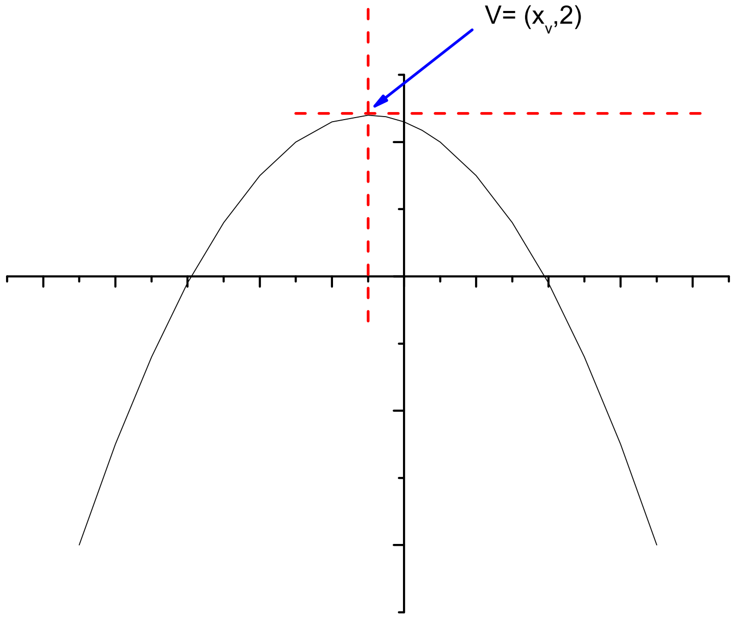
Finalmente,

$\boxed{Imf= (-\infty, 3]}$

Ejemplo 2

Hallar la función cuadrática f tal que C°:{-3, 1} e Imf= (-∞, 2]

Para darnos cuenta de cómo se resuelve hacemos un gráfico aproximado de la función usando los datos.



Como Imf= (-∞, 2], entonces $y_v = 2$

Como tenemos los ceros: C°:{-3, 1} calculamos xv con la ecuación (2):

$$\boldsymbol{x_v = \frac{-3+1}{2} = -1}$$

Entonces sabemos que f(-1)= 2.
Hay dos posibilidades porque tenemos todos los datos. Podemos armar la función según la forma factorizada o según la forma canónica. Cualquiera de las dos está bien. Optamos por el segundo caso:

$f(x) = a\,(x-(-1))^2 + 2$

Usamos alguno de los ceros, por ejemplo el (1,0):

$f(1)= a\,(1+1)^2 + 2$

$f(1) = a\,4+2 =0$

Despejando sale que a = -1/2

Entonces:

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2}$$

OTRA FORMA
Supongamos que elegimos usar la forma factorizada:

f(x) = a (x+3) (x-1)

Tenemos las coordenadas del vértice, o sea que: f(-1)=2

f(-1) = a (-1+3) (-1-1) =2

= a 2 (-2) = 2

Despejando sale que a = -1/2. Entonces:

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)}$$

Importante: con hacer una de las dos opciones alcanza.

Ejemplo 3

Hallar la función cuadrática f tal que su gráfico tiene vértice V= (-1,-2) y f(0)=2

Dados los datos del vértice, conviene usar la forma canónica de la función cuadrática.

$f(x) = a\,(x-(-1))^2 - 2$

$f(x) = a\,(x+1)^2 - 2$

Luego usamos el dato f(0)=2

$f(0) = a\,(0+1)^2 - 2 = 2$

$a\ - 2 = 2$

$a\ = 4$

O sea que:

$$\boxed{f(x) = 4\,(x+1)^2 - 2}$$

Ejemplo 4 (tipo parcial)

Sean $g(x)=x^2-4x+10$ y P el vértice del gráfico de g. Hallar la función lineal f cuyo gráfico es la recta que tiene pendiente 7 y pasa por V.

Nos dan la función cuadrática en su forma polinómica. Necesitamos las coordenadas del vértice y para ello usamos la ecuación (1). En este caso a=1, b=-4 y c=10.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\ 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$y_v=f(2) = 2^2-4\ 2+10=6$

Entonces P= (2, 6)

Nos piden hallar la función lineal f(x)=mx+b. Nos dan como dato que m=7. Entonces:

f(x)=7x+b

Como f pasa por P:

f(2)=7 2+b=6
14+b = 6
b= 6-14= -8

Entonces:

$\boxed{f(x)=7x - 8}$